On a : $\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) \in [0, \pi]$ d'où $\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) > 0$

$$1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) \geq 0$$

Conclusion : $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et par suite (U_n) est une suite croissante

$$V_{n+1} - V_n = 2^{n+2} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - 2^{n+1} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)$$

$$= 2^{n+1}\left(2\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

On a : $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1.\tan^2 x}$ car

$$\left[\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\sin x cos x}{\cos^2 x\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\right]$$

$$V_{n+1} - V_n = 2^{n+1}\left[2\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - \tan\left(2.\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)\right]$$

$$= 2^{n+1}\left[2\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) - \left(\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}\right)\right] = \frac{-2^{n+2}\tan^3\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right)}$$

On a : $0 < \left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) < \frac{\pi}{4}$

D'où : $0 < \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+3}}\right) < 1$

Et par suite $V_{n+1} - V_n < 0$

Conclusion : (V_n) est une suite décroissante